利用重正化群方法推导非线性 Reynolds 应力模型*

刘正锋[1] 王晓宏[1,2]**

1. 中国科学技术大学热科学和能源工程系，合肥 230026；
2. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室，北京 100080

摘要 近年来，Rubinstein 和 Barton 利用 Yakhot 和 Orszag 湍流重正化群方法推导非线性 Reynolds 应力模型，但是他们分析计算过程中存在着一些不自洽的地方．文中利用重正化群方法，对 Reynolds 应力的数学表达式作二阶微扰展开，从理论上推导得到非线性 Reynolds 应力模型，其数学形式与从量纲分析和数学物理性质的合理性讨论得到的通用模型形式完全相同，另外从理论上计算了各待定湍流常数．

关键词 湍流模式 **Reynolds** 应力 非线性涡粘性模式 重正化群

自然界的流动大多为湍流，而湍流问题是流体力学和理论物理中最困难的问题之一，人们试图利用各种新的思想和方法予以研究，以期对湍流有更多的了解．目前人们普遍认为湍流运动满足 Navier-Stokes 方程，但对 Navier-Stokes 方程求平均后，将出现新的未知项——Reynolds 应力项，由于不了解 Reynolds 应力和平均速度场之间的关系，从而湍流问题不封闭．将 Reynolds 应力和平均场联系起来是湍流模式理论的核心内容．

目前工程中常用的 Reynolds 应力模型有 Boussinesq 线性涡粘性模型以及 Prandtl 混合长度模式等．这些线性模型在一定程度上能够满足工程应用的需要，但是由于模型过于简单，对于一些复杂湍流运动的预报性较差．湍流的非线性性质是湍流的基本特性之一，即使是在简单的湍流衰变过程中都有强烈的反映[1]．由于非线性 Reynolds 应力模型比线性 Reynolds 应力模型含有更加丰富的内容，发展和完善非线性 Reynolds 应力模型成为近期湍流模式理论研究的重点课题之一．

Speziale[2—4] 根据物质参照系不变性的制约条件，利用张量表示理论，建立了含有平均速度梯度平方项的非线性 Reynolds 应力模型，该非线性模型含有丰富的物理信息，在计算矩形管流中出现了实验观测中的二次流，并且对后台阶流动的计算也有相应的改进；钱炜祺和符松[5] 后来改进了 Speziale 等的非线性模型，考虑了非均匀流动中速度高阶导数的影响，引入了二阶导数项，他们认为 Reynolds 应力与流动的“历史”有关，并将这一项看成 Reynolds 应力的松弛项，并利用新的非线性模型对三维湍流边界层进行了计算，计算结果比一般的非线性模型更吻合实验结果；为计算复杂几何结构的湍流场，符松等[6,7] 进一步发展了低 Reynolds 数的湍流非线性 Reynolds 应力模型．上述湍流非线性 Reynolds 应力模型的数学形式均来源于量纲分析和数学物理性质的合理性讨论，其中具体的待定湍流常数通过一些简单湍流的实验数据予以估计，从理论上出发去推导非线性 Reynolds 应力模型并计算待定湍流常数具有重要的理论和工程实际意义．

2007-01-08 收稿，2007-03-09 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号：10472115)、教育部新世纪优秀人才支持计划和中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室开放研究课题资助项目

** 通信作者，E-mail：xhwang@ustc.edu.cn

近年来，统计力学方法被应用到建立剪切湍流的模式理论中，Yoshizawa[8,9]利用Kraichnan的湍流直接相互作用理论并假设平均场为大尺度缓变运动和脉动场为小尺度快变运动，Rubinstein和Barton[10,11]利用Yakhot和Orszag[12]（YO）发展的湍流重正化群方法，分别从理论上推导了湍流非线性Reynolds应力模型和湍流二阶矩封闭模型并计算湍流经验常数．Rubinstein和Barton[10,11]对于湍流非线性Reynolds应力模型以及湍流二阶矩封闭模型的推导和计算中存在理论不自洽的问题，对于他们从Reynolds应力微分方程出发推导湍流二阶矩封闭模型的工作[11]，我们在近期的文章中指出了其中的不足，并利用重正化群方法进行了重新推导[13]．

对于利用YO湍流重正化群方法推导湍流非线性Reynolds应力模型，Rubinstein和Barton的工作[10]存在以下数学物理问题：（i）同一计算中采用不同的y值：$y=-1$和$y=3$进行计算，理论上不自洽[14—17]，这是由于计算积分的时候做了带有计算误差的积分域平移而导致的；（ii）假设平均速度的连续性方程不适用（在Fourier空间上$Q_\mu u_\mu(-\mathbf{Q})\neq 0$）．

本文将在Rubinstein和Barton[10]及我们以前工作[15]的基础上，利用YO湍流重正化群方法[12]，重新推导湍流非线性Reynolds应力模型并完全从理论上计算模型中的待定湍流常数．

1 利用湍流重正化群理论推导非线性 Reynolds 应力模型

YO湍流重正化群理论[12]假设，在惯性子区域内湍流脉动速度可以用Gauss随机力作用下的Navier-Stokes方程予以描述

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}+\nu_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_k\partial x_k}+f_\alpha \qquad (1)$$

脉动速度u_α的Fourier变换形式为

$$u_\alpha(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_\alpha(\hat{k})+\frac{\lambda_0}{2i}G_0(\hat{k})P_{\alpha mn}(\boldsymbol{k})\cdot\int_{q,\ |\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\Lambda_0}u_m(\hat{k}-\hat{q})u_n(\hat{q})\frac{\mathrm{d}(\hat{q})}{(2\pi)^{d+1}} \qquad (2)$$

其中$G_0(\hat{k})=(-i\omega+\nu_0k^2)^{-1}$，$P_{\alpha mn}(\boldsymbol{k})=k_mP_{\alpha n}(\boldsymbol{k})+k_nP_{\alpha m}(\boldsymbol{k})$，$P_{\alpha m}(\boldsymbol{k})=\delta_{\alpha m}-k_\alpha k_m/k^2$，$\hat{k}=(\boldsymbol{k},\ \omega)$；$\lambda_0$为重正化微扰展开的耦合参数，不失普遍性令$\lambda_0=1$；$\Lambda_0$为高波数截断；Gauss型随机力$f$满足两点作用关联：

$$\langle f_\alpha(\hat{k})f_\beta(\boldsymbol{k}')\rangle=2D_0(2\pi)^{d+1}\cdot P_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})k^{-y}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(\omega+\omega') \qquad (3)$$

其中取$y=d=3$可以推得湍流Kolmogrov-5/3律并计算得到和实验相符的Kolmogrov常数[12,15,17]．

湍流重正化群方法的基本思想是，首先将脉动速度$\boldsymbol{u}(\hat{k})$分成低波数$\boldsymbol{u}^<$（$k\in(\Lambda_f,\ \Lambda_0-d\Lambda)$）和高波数$\boldsymbol{u}^>$（$k\in(\Lambda_0-d\Lambda,\ \Lambda_0)$）两部分，即：

$$u_\alpha^<(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_\alpha^<(\hat{k})+\frac{\lambda_0}{2i}G_0(\hat{k})P_{\alpha mn}(\boldsymbol{k})\cdot\int[u_m^<(\hat{k}-\hat{q})u_n^<(\hat{q})+2u_m^>(\hat{k}-\hat{q})u_n^<(\hat{q})+u_m^>(\hat{k}-\hat{q})u_n^>(\hat{q})]\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \qquad (4)$$

$$u_\alpha^>(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_\alpha^>(\hat{k})+\frac{\lambda_0}{2i}G_0(\hat{k})P_{\alpha mn}(\boldsymbol{k})\cdot\int[u_m^<(\hat{k}-\hat{q})u_n^<(\hat{q})+2u_m^>(\hat{k}-\hat{q})u_n^<(\hat{q})+u_m^>(\hat{k}-\hat{q})u_n^>(\hat{q})]\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \qquad (5)$$

为了消除方程(4)中的高波数速度分量$\boldsymbol{u}^>$，将方程(5)代入(4)中(即对λ_0作微扰展开)，对高波数随机力求平均，逐次对$(\Lambda,\ \Lambda_0)$高波数随机力进行平均得到：

$$u_\alpha(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_\alpha(\hat{k})+\frac{\lambda_0}{2i}G(\hat{k})P_{\alpha mn}(\boldsymbol{k})\cdot\int_{q,\ |\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\Lambda}u_m(\hat{k}-\hat{q})u_n(\hat{q})\frac{\mathrm{d}(\hat{q})}{(2\pi)^{d+1}} \qquad (6)$$

其中$G(\hat{k})=(-i\omega+\nu(\Lambda)k^2)^{-1}$，$\nu(\Lambda)$为重正化粘性：$\nu(\Lambda)=\left(\frac{3}{8}\frac{d-1}{d+2}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\right)^{1/3}\Lambda^{-4/3}$[12,15,17]（$S_d=2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$表示$d$维单位球的表面积）．

将湍流Reynolds应力和平均场联系起来，使湍流问题封闭是湍流模式理论的核心内容．本文将从湍流重正化群理论出发推导Reynolds应力的非线性模型．湍流Reynolds应力的Fourier变换为

$$\tau_{\alpha\beta}=-\langle u_\alpha(\boldsymbol{x},t)u_\beta(\boldsymbol{x},t)\rangle=-\int\langle u_\alpha(\hat{p})\cdot u_\beta(\hat{q})\rangle e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}}\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}/(2\pi)^{2d+2} \tag{7}$$

其中 $\hat{x}=(\boldsymbol{x},t)$，将脉动速度分成高波数 $\boldsymbol{u}^>$ 和低波数 $\boldsymbol{u}^<$ 两部分得到 $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\alpha\beta}^<+\tau_{\alpha\beta}^>$，其中

$$\tau_{\alpha\beta}^<=-\int\langle u_\alpha^<(\hat{p})u_\beta^<(\hat{q})\rangle e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}} \tag{8}$$

$$\tau_{\alpha\beta}^>=-\int\langle 2u_\alpha^<(\hat{p})u_\beta^>(\hat{q})+u_\alpha^>(\hat{p})u_\beta^>(\hat{q})\rangle\cdot e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}} \tag{9}$$

把方程(5)代入方程(9)中，即以参数 λ_0 作微扰展开，精确到 λ_0 的二阶展开项有 $\tau_{\alpha\beta}^>=(\tau_{\alpha\beta}^0)^>+\lambda_0(\tau_{\alpha\beta}^1)^>+\lambda_0^2(\tau_{\alpha\beta}^2)^>$，其中

$$(\tau_{\alpha\beta}^0)^>=-\int G(\hat{p})G(\hat{q})\langle f_\alpha^>(\hat{p})f_\beta^>(\hat{q})\rangle\cdot e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(\tau_{\alpha\beta}^1)^>=i\int[&G(\hat{p})G(\hat{q})p_{\beta mn}(\boldsymbol{q})G(\hat{q}-Q)\cdot\\&\langle f_\alpha^>(\hat{p})f_m^>(\hat{q}-Q)\rangle+G(\hat{p})G(\hat{q})\cdot\\&P_{\alpha mn}(\boldsymbol{p})G(\hat{p}-Q)\langle f_\beta^>(\hat{q})f_m^>(\hat{p}-Q)>\\&u_n^<(Q)e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}\mathrm{d}Q}{(2\pi)^{3d+3}}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}(\tau_{\alpha\beta}^2)^>=-\int[&G(\hat{p})P_{\alpha mn}(\boldsymbol{p})G(\hat{p}-Q)G(\hat{q})\cdot\\&P_{\beta rs}(\boldsymbol{q})G(\hat{q}-\hat{T})\langle f_m^>(\hat{p}-Q)f_r^>(\hat{q}-\hat{T})\rangle+\\&G(\hat{p})G(\hat{p}-Q)G(\hat{p}-Q-\hat{T})G(\hat{q}).\\&P_{\alpha mn}(\boldsymbol{p})P_{mrs}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{Q})\langle f_r^>(\hat{p}-Q-\hat{T})f_\beta^>(\hat{q})\rangle+\\&G(\hat{p})G(\hat{q})G(\hat{q}-Q)G(\hat{q}-Q-\hat{T}).\\&P_{\beta mn}(\boldsymbol{q})P_{nrs}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q})\langle f_r^>(\hat{q}-Q-\hat{T})f_\alpha^>(\hat{p})\rangle]\cdot\\&u_n^<(\boldsymbol{Q})u_s^<(\boldsymbol{T})e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}\mathrm{d}Q\mathrm{d}\hat{T}}{(2\pi)^{4d+4}}\end{aligned} \tag{12}$$

本文采用YO湍流重正化群理论的计算方法，将随机力的两点作用关联表达式(3)代入方程(10)—(12)，逐次对高波数随机力求平均，建立循环迭代微分关系式.

将方程(3)代入(10)，逐次对高波数随机力求平均可得：

$$\frac{\mathrm{d}(\tau_{\alpha\beta})^0}{\mathrm{d}\Lambda}=-\frac{2}{3}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{\Lambda^{d-y-3}}{\nu(\Lambda)}\delta_{\alpha\beta} \tag{13}$$

将湍流运动看成两部分组成，波数小于 Λ_f 的大尺度速度看成平均速度，波数大于 Λ_f 的小尺度速度看成脉动速度，其中 $\Lambda_f=\pi/L$，积分尺度 L 对应于湍流最大脉动尺度. 逐次对 (Λ_f,Λ_0) 的高波数随机力进行平均得到

$$(\tau_{\alpha\beta})^0=-\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{1}{\nu(\Lambda_f)\Lambda_f^2}\delta_{\alpha\beta} \tag{14}$$

对于 λ_0 的一阶展开项 $(\tau_{\alpha\beta}^1)$，为计算方便起见，引入变量替换：对于方程(11)，在第一项中令 $\hat{q}-Q\to\hat{q}'$，$\hat{p}\to\hat{p}'$ 和在第二项中令 $\hat{q}-Q\to\hat{q}'$，$\hat{p}\to\hat{p}'$，得到：

$$\begin{aligned}(\tau_{\alpha\beta}^1)^>=i\int[&G(\hat{p}')G(\hat{q}')G(\hat{q}+Q)P_{\beta mn}(\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{Q})\cdot\\&\langle f_\alpha^>(\hat{p}')f_m^>(\hat{q}')\rangle+G(\hat{p}'+Q)G(\hat{p}')G(\hat{q}')\cdot\\&P_{\alpha mn}(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{Q})\langle f_m^>(\hat{p}')f_\beta^>(\hat{q}')\rangle]u_n^<(Q)\cdot\\&e^{i(\hat{p}'+\hat{q}'+Q)\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{p}'\mathrm{d}\hat{q}'\mathrm{d}Q}{(2\pi)^{3d+3}}\end{aligned} \tag{15}$$

将方程(3)代入(15)，对高波数随机力求平均，由于 $|\boldsymbol{Q}|/|\boldsymbol{q}'|<1$，近似展开至Taylor级数的 $O(|\boldsymbol{Q}|)$ 项，通过计算可建立循环迭代微分关系式

$$\frac{\mathrm{d}(\tau_{\alpha\beta})^1}{\mathrm{d}\Lambda}=\frac{3i}{d(d+2)}\frac{D_0}{(2\pi)^d}\frac{\Lambda^{d-y-5}}{\nu^2(\Lambda)}\cdot\int(Q_\alpha u_\beta^<(Q)+Q_\beta u_\alpha^<(Q))e^{iQ\hat{x}}\frac{\mathrm{d}Q}{(2\pi)^{d+1}} \tag{16}$$

这样逐次消除 (Λ_f,Λ_0) 之间高波数分量的影响后，利用 $\lim\limits_{\Lambda\to\Lambda_f}\frac{\partial\boldsymbol{u}^<}{\partial x_k}=\frac{\partial U}{\partial x_k}$ 可得：

$$(\tau_{\alpha\beta})^1=\frac{3}{20}\frac{D_0}{(2\pi)^d}\frac{1}{\nu^2(\Lambda_f)\Lambda_f^4}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right) \tag{17}$$

和计算 $(\tau_{\alpha\beta})^1$ 相类似，引入变量替换：对于方程(12)，在第一项中令 $\hat{p}-Q\to\hat{p}'$，$\hat{q}-\hat{T}\to\hat{q}'$，在第二项中 $\hat{p}-Q-\hat{T}\to\hat{p}'$，$\hat{q}\to\hat{q}'$ 和在第三项中 $\hat{p}\to\hat{p}'$，$\hat{q}-Q-\hat{T}\to\hat{q}'$ 有：

$$(\tau_{\alpha\beta}^2)^{>} = -\int [G(\hat{p}')G(\hat{q}')G(\hat{p}'+\hat{Q})G(\hat{q}'+\hat{T})\cdot P_{\alpha mn}(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{Q})P_{\beta rs}(\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{T})\langle f_m^{>}(\hat{p}')f_r^{>}(\hat{q}')\rangle + G(\hat{p}')G(\hat{q}')G(\hat{p}'+\hat{Q}+\hat{T})G(\hat{p}'+\hat{T})\cdot P_{\alpha mn}(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{T})P_{mrs}(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{T})\langle f_r^{>}(\hat{p}')f_\beta^{>}(\hat{q}')\rangle + G(\hat{p}')G(\hat{q}')G(\hat{q}'+\hat{Q}+\hat{T})G(\hat{q}'+\hat{T})\cdot P_{\beta mn}(\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{T})P_{mrs}(\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{T})\langle f_\alpha^{>}(\hat{p}')f_r^{>}(\hat{q}')\rangle]\cdot u_n^{<}(\hat{Q})u_s^{<}(\hat{T})e^{i(\hat{p}'+\hat{q}'+\hat{Q}+\hat{T})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{p}'\mathrm{d}\hat{q}'\mathrm{d}\hat{Q}\mathrm{d}\hat{T}}{(2\pi)^{4d+4}} \tag{18}$$

将方程(3)代入(18)，对高波数随机力求平均，由于$|\boldsymbol{Q}|/|\boldsymbol{q}'|,|\boldsymbol{T}|/|\boldsymbol{q}'|<1$，近似展开至 Taylor 级数的$O(Q^2,T^2,|\boldsymbol{TQ}|)$项，通过计算可建立循环迭代微分关系式：

$$\frac{\mathrm{d}(\tau_{\alpha\beta})^2}{\mathrm{d}\Lambda} = \frac{1}{420}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{\Lambda^{d-y-7}}{\nu^3(\Lambda)}\int\{48[Q_\mu T_\mu u_\alpha^{<}(\hat{Q})\cdot u_\beta^{<}(\hat{T}) + Q_\beta T_\mu u_\mu^{<}(\hat{Q})u_\alpha^{<}(\hat{T}) + Q_\mu T_\alpha u_n^{<}(\hat{Q})u_\beta^{<}(\hat{T}) + Q_\alpha T_\beta u_\mu^{<}(\hat{Q})u_\mu^{<}(\hat{T}) + \frac{1}{2}Q_\mu T_\mu u_m^{<}(\hat{Q})u_m^{<}(\hat{T})\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}Q_\mu T_m u_m^{<}(\hat{Q})u_\mu^{<}(\hat{T})\delta_{\alpha\beta}] + 56[\boldsymbol{Q}_\mu Q_\beta u_\alpha^{<}(\hat{Q})u_\mu^{<}(\hat{T}) + Q_\mu Q_\alpha u_\beta^{<}(\hat{Q})u_\mu^{<}(\hat{T})]\}e^{i(\hat{Q}+\hat{T})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{Q}\mathrm{d}\hat{T}}{(2\pi)^{2d+2}} \tag{19}$$

由于 $\int Q_a T_b u_c^{<}(\hat{Q})u_d^{<}(\hat{T})e^{i(\hat{Q}+\hat{T})\hat{x}}\frac{\mathrm{d}\hat{Q}\mathrm{d}\hat{T}}{(2\pi)^{2d+2}} = -\frac{\partial u_c^{<}}{\partial x_a}\frac{\partial u_d^{<}}{\partial x_b}$，并利用 $\lim\limits_{\Lambda\to\Lambda_f}\frac{\partial \boldsymbol{u}^{<}}{\partial x_k} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_k}$可得：

$$(\tau_{\alpha\beta})^2 = -\frac{1}{840}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{\Lambda_f^{-6}}{\nu^3(\Lambda_f)}\left\{48\left[\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_m}\right)\delta_{\alpha\beta}\right] + 56U_\mu\left(\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\mu} + \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha\partial x_\mu}\right)\right\} \tag{20}$$

Rubinstein 和 Barton[10] 在计算二阶项$(\tau_{\alpha\beta})^2$时，假设$\int \nu Q_\mu Q_\alpha V_\mu(-Q)V_\beta(Q)\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\nu_T\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\mu}\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\alpha}$，实际上从连续性方程出发可得$\int Q_a Q_\mu u_\mu(-Q)u_b(Q)\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = 0$，这也是他们的非线性模式推导工作得不到速度二阶导数项的原因，并且他们在同一计算的不同地方采用不同的y值($y=-1$ 和 $y=3$)，破坏了参数的一致性，这是由于他们没有考虑积分域的平移造成的[14—17]．本文采用单一的y值：$y=3$予以计算，从而保证了参数的一致性，本文从湍流重正化群理论出发并采用了严格的数学推导，由方程(13)，(17)和(20)得到

$$\tau_{\alpha\beta} = -\langle u_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})u_\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\rangle = (\tau_{\alpha\beta})^0 + (\tau_{\alpha\beta})^1 + (\tau_{\alpha\beta})^2 = -\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{1}{\nu(\Lambda_f)\Lambda_f^2}\delta_{\alpha\beta} + \frac{3}{20}\frac{D_0}{(2\pi)^d}\frac{1}{\nu^2(\Lambda_f)\Lambda_f^4}\cdot\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{840}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{\Lambda_f^{-6}}{\nu^3(\Lambda_f)}\left\{48\left[\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_m}\right)\delta_{\alpha\beta}\right] + 56U_\mu\left(\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\mu} + \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha\partial x_\mu}\right)\right\} \tag{21}$$

当下标 α，β 收缩时，$\langle u_\alpha u_\alpha\rangle = 2K$，其中

$$K = \frac{3}{2}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{1}{\nu(\Lambda_f)\Lambda_f^2} + \frac{1}{10}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{\Lambda_f^{-6}}{\nu^3(\Lambda_f)}\cdot\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_m}\right) \tag{22}$$

将方程(22)代入(21)得到非线性 Reynolds 应力模型为

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta} + \frac{3}{20}\frac{D_0}{(2\pi)^d}\frac{1}{\nu^2(\Lambda_f)\Lambda_f^4}\cdot\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{840}\frac{D_0S_d}{(2\pi)^d}\frac{\Lambda_f^{-6}}{\nu^3(\Lambda_f)}\left\{48\left[\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta}\right) - 32\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_m}\right)\delta_{\alpha\beta}\right] + 56U_\mu\left(\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\mu} + \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha\partial x_\mu}\right)\right\} \tag{23}$$

利用 YO 理论的结果 $2D_0S_d/(2\pi)^d = 1.59\bar{\varepsilon}$，$\nu(\Lambda_f)\Lambda_f^2 = 1.195\bar{\varepsilon}/K$[12]，方程(23)可以写成

$$\tau_{\alpha\beta} = -\langle u_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})u_\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\rangle = -\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta} + 0.083\frac{K^2}{\bar{\varepsilon}}\cdot\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{K^3}{\bar{\varepsilon}^2}\left[C_{\tau1}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu} - \frac{1}{3}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\delta_{\alpha\beta}\right) + C_{\tau2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_m}\delta_{\alpha\beta}\right) +\right.$$

$$C_{\tau 3}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta}-\frac{1}{3}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu}\delta_{\alpha\beta}\right)+ C_{\tau 4}U_\mu\left(\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\mu}+\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha\partial x_\mu}\right)\Bigg] \tag{24}$$

其中 $C_{\tau 1}=0.026$, $C_{\tau 2}=0.026$, $C_{\tau 3}=0.026$, $C_{\tau 4}=0.031$. 采用二阶非线性模式的常用表达形式，方程(24)改写为:

$$\tau_{\alpha\beta}=-\langle u_\alpha(\boldsymbol{x},t)u_\beta(\boldsymbol{x},t)\rangle=-\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta}+ 2C_\mu\frac{K^2}{\varepsilon}S_{\alpha\beta}-\frac{K^3}{\varepsilon^2}\left[C_1\left(S_{\alpha\mu}S_{\mu\beta}-\frac{1}{3}S_{m\mu}S_{\mu m}\delta_{\alpha\beta}\right)+ C_2(S_{\alpha\mu}W_{\mu\beta}+S_{\beta\mu}W_{\mu\alpha})+C_3\left(W_{\alpha\mu}W_{\mu\beta}- \frac{1}{3}W_{m\mu}W_{\mu m}\delta_{\alpha\beta}\right)+C_4\left(U_\mu\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right)\right] \tag{25}$$

其中 $S_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$ 为平均应变率张量，$W_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$ 为平均涡量张量；各湍流常数的理论计算值为：$C_\mu=0.083$, $C_1=0.104$, $C_2=C_3=0$, $C_4=0.062$. 线性涡粘性系数 C_μ 的理论计算值和通常经验值 0.09[2] 很接近.

2 结论与展望

本文利用 YO 湍流重正化群方法，对 Reynolds 应力作二阶微扰展开，从理论上推导得到非线性 Reynolds 应力模型，其数学形式与从量纲分析和数学物理性质的合理性讨论得到的通用模型形式完全相同，另外从理论上计算了各待定湍流常数. 本文从理论上推导得到钱炜祺和符松[5] 等建议的非线性 Reynolds 应力模型中的二阶导数项——Reynolds 应力“松弛”项，与 Rubinstein 和 Barton 工作不同的是，在本文的计算采用单一的 y 值：$y=3$，且在整个理论推导中湍流平均速度均满足连续性方程. 表1给出本文的各待定湍流常数理论计算值与 Speziale 等由简单湍流的实验数据给出的估计值及 Yoshizawa 的理论结果的比较.

Speziale[18] 从数学物理的合理性讨论出发，认为湍流二阶非线性 Reynolds 应力模型中不应包含平均涡量张量的平方项，即方程(25)中 $C_3=0$，本文的推导结果满足该条件，但本文的理论推导中同时有 $C_2=0$，即没有平均应变率张量与平均涡量张量的相互作用项，而这相互作用项对于旋转流场的计算很重要，这是本文理论模型的一个缺陷. 对于湍流运动，平均场和脉动场具有不同的空间和时间尺度，在近期的研究工作中，我们利用 Yoshizawa 的观点，对平均场和脉动场采用不同尺度展开，再利用 YO 湍流重正化群理论推导湍流二阶非线性 Reynolds 应力模型，该方法理论计算得到的模型中将出现平均应变率张量与平均涡量张量的相互作用项，另外我们还利用该方法推导湍流二阶矩封闭模型；对湍流理论推导的模型需要利用实际应用算例予以检验，湍流重正化群方法得到的模型没有考虑固壁的影响，对于固壁附近的流动，需进行壁面修正，上述研究工作正在开展之中.

表1 不同二阶非线性模型的常数的比较

湍流常数	C_1	C_2	C_3	C_4
Speziale 模型[3]	0.055	−0.055	0	0
Yoshizawa 的理论计算值[8]	−0.284	−0.064	0.284	0
钱炜祺和符松等改进后的模型[5]	0.02	−0.036	1.25	0.038
本文的理论计算值	0.104	0	0	0.062

如何去建立并发展湍流模式理论一直是一个热点问题，这对于计算工程实际问题至关重要，利用重正化群方法完全从理论上出发推导湍流模式并计算对应的湍流常数，这将有助于湍流模式理论的发展.

参 考 文 献

1 符 松. 湍流模式——研究现状与发展模式. 应用基础与工程科学学报，1994，2：1−15
2 Speziale CG. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. Annu Rev Fluid Mech，1991，23：107−157
3 Speziale CG. On non-linear $K-l$ and $K-\varepsilon$ models of turbulence. Journal of Fluid Mechanics，1987，178：459−475
4 Gatski TB，Speziale CG. On explicit algebraic stress models for complex turbulence flows. J Fluid Mech，1993，254：59−78
5 钱炜祺，符 松，等. 用非线性涡粘性模式计算三维湍流边界层. 空气动力学报，2002，20(2)：165−173
6 Fu S，Qian WQ. Development of curvature sensitive nonlinear eddy-viscosity model. AIAA J，2002，40：2225−2233
7 Fu S，Guo Y，Qian WQ，et al. Recent progress in nonlinear eddy-viscosity turbulence modelling. Acta Mech Sinica，2003，19：

1—11
8 Yoshizawa A. Statistical analysisi of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation. Phys Fluids, 1984, 27: 1377—1387
9 Yoshizawa A. Derivation of a model Reynolds stress transport equation using a renormalization of the eddy-viscosity representation. Phys Fluids A, 1993, 5: 707—715
10 Rubinstein R, Barton JM. Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group. Phys Fluids A, 1990, 2: 1472—1476
11 Rubinstein R, Barton JM. Renormalization group analysis of Reynolds stress transport equation. Phys Fluids A, 1992, 4: 1759—1766
12 Yakhot V, Orszag S. Renormalization group analysis of turbulence, I. Basic Theory. J Sci Comput, 1986, 1: 3—51
13 刘正锋, 王晓宏. 利用重正化群方法推导湍流二阶矩封闭模型. 力学学报, 2007, 39: 195—201
14 McComb WD. The Physics of Fluid Turbulence. Clarendon: Oxford, 1990
15 Wang XH, Wu F. One modification to the Yakhot-Orszag calculation in the renormalization-group method of turbulence. Phys Rev E, 1993, 48: R37—R38
16 Zhou Y, McComb WD, Vahala G. Renormalization group (RG) in turbulence: History and comparative perspective, Tech Rep NASA CR-201718 ICASE Report No. 97—36, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1997
17 Sukoriansky S, Galperin B, Staroselsky I. Cross-term and ε-expansion in the RNG theory of turbulence. Fluid Dynamics Research, 2003, 33: 319—331
18 Speziale CG. A consistency condition for nonlinear algebraic Reynolds stress models in turbulence. Int J Non-Linear Mechanics, 1998, 33: 579—584

《自然科学进展》投稿须知

《自然科学进展》是国家自然科学基金委员会和中国科学院共同主办的综合性学术月刊，刊登自然科学各学科领域的基础研究和应用基础研究方面的高水平、有创造性和重要意义的最新研究成果论文，以促进国内外学术交流. 中文版由各地邮局公开发行，英文版由英国 Taylor & Francis Ltd 总代理，在世界各地发行.

本刊中文版为《中国科技期刊引证报告》的源期刊，并被《中文核心期刊要目总览》、“生物学文摘”等数据库和检索系统收录；英文版(*Progress in Natural Science*)被 SCI Expanded, Chemical Abstracts (CA), Engineering Index (EI), 俄罗斯《文摘杂志》，美国《数学评论》和日本《科技文献速报》等多种国际检索系统收录.

请直接登录本刊网站(http://pub.nsfc.gov.cn)投稿. 请使用国标(GB3100~3102-93)规定的法定计量单位. 所含曲线图、示意图和照片要尽量精选，原则上总数不超过6幅；图题、图注和纵横坐标参数以及图内说明文字均用中文，参数采用国标规定符号；彩版需额外支付制作印刷费. 表格均采用三线表，易引起含混时，可加辅线，对表中所列诸项需特殊说明时，可在表下用 a), b)等注示. 插图和表格排在正文提及后的适当处. 资助项目需在首页脚注中说明.

投稿时请提供如下材料和信息：(i)申明稿件无泄密之处，未曾正式发表过，也未同时投往他刊；所有作者都了解文章的内容，并同意署名；简要介绍研究工作的背景及成果的意义；明确所投栏目及学科分类. (ii)作者的所有联系方式. 通讯地址，邮政编码，电话，传真及E-mail地址. (iii)推荐5—7名非本单位的具有正高级职称同行评审专家及其单位、通信地址，也可提出要求回避的专家，供稿件送审时参考.

稿件经同行专家评议后由编辑部做出取舍决定. 不拟刊登的来稿，编辑部将及时通知作者；对于录用的稿件需酌收版面费，论文刊出的当月同时上网，并赠送1本样刊.

论文撰写格式请严格遵循本刊的相关要求. 所列文献按正文中引用的先后排序. 文献的作者不多于3位时，需全部列出，文献的作者多于3位时，只列前3位作者，其余用“等”或“et al.”代替.

联系地址：100085 北京海淀区双清路83号 国家自然科学基金委员会《自然科学进展》编辑部
联系电话：(010) 62326952, 62327202；传真：(010) 62326921
本刊网址：http://pub.nsfc.gov.cn；E-mail：progress@mail.nsfc.gov.cn